(5.20) За сваки симетрични тензор важи:

$$T^3 = S_1 T^2 - S_2 T + S_3 \cdot E \rightarrow \text{Cayley-Hamiltonova теорема}$$

Ако је T симетрични тензор, он се на основу нормалне дијадне репрезентације може записати у облику:

$$T = \lambda_1 \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_1{}'\} + \lambda_2 \{\vec{e}_2{}', \vec{e}_2{}'\} + \lambda_3 \{\vec{e}_3{}', \vec{e}_3{}'\} \quad \text{-- једн. (5.50)}$$

$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ су орт вектори 3 узајамно нормална својствена правца, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ су различите и реалне својствене вредности.

$J^3 = S_1 J^2 - S_2 J + S_3 \cdot E \quad : \quad J = \{\vec{T_k}', \vec{e_k}'\} = \lambda_1\{\vec{e_1}', \vec{e_1}'\} + \lambda_2\{\vec{e_2}', \vec{e_2}'\} + \lambda_3\{\vec{e_3}', \vec{e_3}'\}$

$$\boxed{J = \lambda_k\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\}}$$

$J^2 = J \cdot J = \lambda_k\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\} \cdot \lambda_l\{\vec{e_l}', \vec{e_l}'\} = \lambda_k \lambda_l (\vec{e_k}' \cdot \vec{e_l}')\{\vec{e_k}', \vec{e_l}'\} \stackrel{k=l}{=}$

$J^2 = \lambda_k^2\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\} = \lambda_1^2\{\vec{e_1}', \vec{e_1}'\} + \lambda_2^2\{\vec{e_2}', \vec{e_2}'\} + \lambda_3^2\{\vec{e_3}', \vec{e_3}'\}$

$J^3 = J \cdot J^2 = \lambda_m\{\vec{e_m}', \vec{e_m}'\} \cdot \lambda_k^2\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\} = \lambda_k^3\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\}$

$$\lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = S_1\lambda^2 - S_2\lambda + S_3$$

$J^3 = (S_1\lambda_k^2 - S_2\lambda_k + S_3)\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\} = S_1 \underbrace{\lambda_k^2\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\}}_{J^2} - S_2 \lambda_k\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\} + S_3\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\}$

$J^3 = S_1 \cdot J^2 - S_2 \cdot J + S_3 \cdot E$ ✓

Афине трансформације

До сада смо тензоре схватали као операторе који датом вектору $\vec{A}$ придружују други вектор $\vec{B} = \mathcal{U} \cdot \vec{A}$ у истом коорд. систему. Међутим, тензор се може схватити и као оператор који описује једну трансформацију простора, тј. сваком вектору положаја $\vec{r}$ у коорд. систему S придружује вектор положаја $\vec{r}' = \mathcal{U} \cdot \vec{r}$ у другом коорд. систему S'. Трансформације при којима између нових и старих коорд. постоји зависност облика опште линеарне ф-је, називају се афине. Да би афина трансформација била једнозначна, тензор не сме да буде сингуларан, тј. мора постојати инверзни тензор U^{-1} који описује инверзну трансформацију.

Нека су $\vec{A}' = U\cdot\vec{A}$ и $\vec{B}' = U\cdot\vec{B}$ вектори у коорд. систему S' у које прелазе вектори $\vec{A}$ и $\vec{B}$ из коорд. система S применом афине трансформације тензором U. Нека између $\vec{A}$ и $\vec{B}$ постоји веза $\vec{B} = J\cdot\vec{A}$. Онда и између $\vec{A}'$ и $\vec{B}'$ мора постојати веза истог типа, $\vec{B}' = J'\cdot\vec{A}'$, при чему тензор J' зависи од J и U. Нађимо ову везу.

Због $\vec{A}' = U\cdot\vec{A}$ и $\vec{B}' = U\cdot\vec{B}$ и несингуларности тензора U имамо:

$$\vec{A} = U^{-1}\cdot\vec{A}' \quad \text{и} \quad \vec{B} = U^{-1}\cdot\vec{B}'$$

Тада је $\vec{B} = J\cdot\vec{A}$ облика: $U^{-1}\cdot\vec{B}' = J\cdot(U^{-1}\vec{A}')\,/\cdot U$ с лева

имамо: $\underbrace{(U U^{-1})\cdot\vec{B}'}_{E\cdot\vec{B}'} = U\cdot[J\cdot(U^{-1}\cdot\vec{A}')]$, одн.

$$E\cdot\vec{B}' = \vec{B}' = (U\cdot J\cdot U^{-1})\cdot\vec{A}'$$

Поређењем са $\vec{B}' = J'\cdot\vec{A}'$ добијамо:

$$J'\cdot\vec{A}' = (U\cdot J\, U^{-1})\cdot\vec{A}', \text{ па је:}$$

$$\boxed{J' = U\cdot J\, U^{-1}} \quad - J - \quad (20)$$

Ово је трансформација тензора при афиној трансформацији координата помоћу тензора U. Ово је општија формула од оне за трансф. компоненти тензора при ротацији координатног система. $\boxed{\vec{T}_i' = \alpha_{ik}\vec{T}_k}$

(5.24) За афине трансформације важи $\mathcal{T}' = U\cdot\mathcal{T}\cdot U^{-1}$, где се врши афина трансформ. координата помоћу тензора U из S у S'.

јер је $tr(U\cdot V) = tr(V\cdot U)$

$$S_1 \overset{def}{=} \vec{T}_k \vec{e}_k = tr\,\mathcal{T}$$

$$S_1' = tr\,\mathcal{T}' = tr(U\cdot\mathcal{T}\cdot U^{-1}) = tr[U\cdot(\mathcal{T}\cdot U^{-1})] = tr[(\mathcal{T}\cdot U^{-1})\,U] = tr[\mathcal{T}\cdot(U^{-1}\cdot$$

$$= tr[\mathcal{T}\,(\underbrace{U\,U^{-1}}_{\mathcal{E}})] = tr[\mathcal{T}\cdot\mathcal{E}] = tr(\mathcal{T}) = tr\,\mathcal{T} = S_1$$

Значи прва скаларна инваријанта се не мења при афиним трансформацијама координата.

$$S_3 = \det\mathcal{T} \quad \text{и} \quad S_3' = \det\mathcal{T}' = \det(U\cdot\mathcal{T}\cdot U^{-1}) \overset{4.11}{=\!=\!=} \det U\cdot\det\mathcal{T}\cdot\det U^{-1} =$$

$$= \det U\cdot\det U^{-1}\cdot\det\mathcal{T} = \det(\underbrace{U\cdot U^{-1}}_{\mathcal{E}})\cdot\det\mathcal{T} = \det\mathcal{E}\cdot\det\mathcal{T} =$$

$= \det\mathcal{T} = S_3 \rightarrow$ трећа скаларна инваријанта се не мења при афиним трансф. коорд.

Друга скаларна инваријанта S_2? Посматрајмо тензор инверзан тензору $\mathcal{T}$, тј. $\mathcal{T}^{-1}$. Његова прва и трећа скаларна инваријанта се не мењају при афиним трансф. координата. Како је по задатку 4.15 $S_2^{-1} = \frac{S_1}{S_3}$, то при афиним трансформацијама и друга скаларна инваријанта остаје непромењена, тј.

$$(S_2^{-1})' = \frac{S_1'}{S_3'} = \frac{S_1}{S_3} = S_2^{-1}\,!\ \checkmark$$

(5.25) Нека је T симетричан тензор и $T' = U \cdot T \cdot U^{-1}$. Тада је:

$$(T')^* = [(U \cdot T \cdot U^{-1})]^* = [U \cdot (T \cdot U^{-1})]^* = (T \cdot U^{-1})^* \cdot U^* =$$

$$= (U^{-1})^* \cdot T^* \cdot U^* = (U^{-1})^* \cdot T \cdot U^*$$

Да би T' био симетричан треба да је $(T')^* = T'$, тј.

унитарни тензор

$$(U^{-1})^* \cdot T \cdot U^* = U \cdot T \cdot U^{-1}$$, тј. $(U^{-1})^* = U$ одн. $U^* = U^{-1}$ → ово је случај ако је афина трансформација ротација. У општем случају тензор T' неће бити симетричан. Слично важи за антисиметричне тензоре.